Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Théme : Suites réelles

Exercice 4 type devoir

Exercice :

Soit U la suite réelle définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^{\,2} - U_n + 2}{1 + U_n} \end{cases}$,pour tout $n \in IN$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < U_n \leq 2$.

b) Etudier la monotonie de la suite U. En déduire que U est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout n de IN on a : $0 \leq U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN$, $0 \leq U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ pour tout $n \in IN^*$

a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $n < S_n \leq n + 1 - (\frac{1}{2})^n$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$

1) a)

- pour $n = 0$ $\quad 1 < U_0 = 2 \leq 2$ (Vraie)

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 < U_n \leq 2$

et montrons que $1 < U_{n+1} \leq 2$.

On a $U_{n+1} - 1 = \dfrac{U_n^2 - U_n + 2}{1 + U_n} - 1$

$= \dfrac{U_n^2 - U_n + 2 - 1 - U_n}{1 + U_n}$

$$= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{1 + u_n}$$

$$= \frac{(u_n - 1)^2}{1 + u_n} > 0 \text{ car } u_n > 1$$

$(u_n - 1)^2 > 0$ et $1 + u_n > 0$

Donc $u_{n+1} > 1$ (1)

b) $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^2 - u_n + 2}{1 + u_n} - 2$

$$= \frac{u_n^2 - u_n + 2 - 2 - 2u_n}{1 + u_n}$$

$$= \frac{u_n^2 - 3u_n}{1 + u_n}$$

$$= \frac{u_n(u_n - 3)}{1 + u_n}$$

$u_n > 0$, $u_n - 3 < 0$, $1 + u_n > 0$

≤ 0

Donc $u_{n+1} \leq 2$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ $1 < u_{n+1} \leq 2$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 < u_n \leq 2$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n + 2}{1 + u_n} - u_n$

$$= \frac{u_n^2 - u_n + 2 - u_n - u_n^2}{1 + u_n}$$

$$= \frac{-2u_n+2}{1+u_n} = \frac{2(1-u_n)}{1+u_n} \quad \begin{matrix} <0 \\ >0 \end{matrix} \quad <0$$

Donc (u_n) est décroissante.

- (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

- On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $1 \leqslant l \leqslant 2$

- $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x+1}$

- f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, en particulier sur $[1,2]$.

Donc $f(l) = l \Leftrightarrow \frac{l^2-l+2}{l+1} = l$

$\Leftrightarrow l^2 - l + 2 = l^2 + l$

$\Leftrightarrow 2l = 2 \Leftrightarrow l = 1$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

2°) a)

- Pour $n=0$ $\quad u_1 - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} > 0$

$$\frac{1}{2}(u_0 - 1) = \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3}$$

Donc $\quad 0 < u_1 - 1 \leq \frac{1}{2}(u_0 - 1)$ (Vraie)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

et montrons que $0 < u_{n+2} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_{n+1} - 1)$

- $u_{n+2} - 1 - \left(\frac{1}{2}(u_{n+1} - 1)\right)$

$$= \frac{u_{n+1}^2 - u_{n+1} + 2}{1 + u_{n+1}} - \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{u_{n+1}^2 - u_{n+1} + 2 - \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_{n+1}^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u_{n+1}}{1 + u_{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}u_{n+1}^2 - 2u_{n+1} + \frac{3}{2}}{1 + u_{n+1}}$$

$$= \frac{u_{n+1}^2 - 4u_{n+1} + 3}{2(1 + u_{n+1})}$$

$2(1+u_{n+1}) > 0$

$$= \frac{(u_{n+1} - 1)(u_{n+1} - 3)}{2(1 + u_{n+1})}$$

$u_{n+1} - 1 > 0$, $\quad u_{n+1} - 3 < 0$, $\quad$ donc le numérateur < 0

Donc $\boxed{U_{n+2} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(U_{n+1} - 1)}$

•) $U_{n+2} - 1 = \dfrac{U_{n+1}^2 - U_{n+1} + 2}{1 + U_{n+1}} - 1$

$= \dfrac{U_{n+1}^2 - U_{n+1} + 2 - 1 - U_{n+1}}{1 + U_{n+1}}$

$= \dfrac{U_{n+1}^2 - 2U_{n+1} + 1}{1 + U_{n+1}}$

$= \dfrac{(U_{n+1} - 1)^2}{1 + U_{n+1}} > 0$

Donc $\boxed{U_{n+2} - 1 > 0}$

Conclusion: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N};\ 0 < U_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(U_n - 1)}$

2) b) pour $n = 0$, on a :

$0 < U_0 - 1 = 2 - 1 = 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

(Vraie)

Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $0 < U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et montrons que $0 < U_{n+1} - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

On a $0 < U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2}(U_n - 1) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

or $\frac{1}{2}(U_n - 1) \geqslant U_{n+1} - 1$

$\Rightarrow U_{n+1} - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) a) Pour $n = 1$;

$1 < S_1 = U_1 = \frac{4}{3} \leqslant 1 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1$ (Vraie)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que

$n < S_n \leqslant n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et montrons que

$n + 1 < S_{n+1} \leqslant n + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$;

$0 < U_k - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$\Rightarrow 1 < u_k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k + 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} 1 < S_{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k + 1\right)$$

$$\Rightarrow n+1+1-1 < S_{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=1}^{n+1} 1$$

$$\Rightarrow n+1 < S_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + n+1$$

$$\Rightarrow n+1 < S_{n+1} \leqslant 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n+1$$

$$\Rightarrow n+1 < S_{n+1} \leqslant n+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n < S_n \leqslant n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n < S_n \leqslant n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = +\infty$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad n < S_n < n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\Rightarrow 1 < \frac{S_n}{n} < 1 + \frac{1}{n} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} - \frac{\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\to 0}}{\underbrace{n}_{\to +\infty}} = 1$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = 1}$